数理解析研究所講究録
580巻 1986年 1-15

Multiplicative η-products について

東大教養 近藤 武 (Takeshi Kondo)

本講は、実例に関する話で理論的なものではない。紙数の関係で、保型関数論的な説明は省略し、とくに§2で定義する2つの変換については、極めて形式的に論ずる。詳しくは文献[5]を参照されたい。

§1. Multiplicative η-products の基本的実例.

1.1 便宜のため、次の記号を用いる。シンボル

$$\pi = \prod_{t=1}^{\infty} t^{r_t} \qquad (r_t \in \mathbb{Z})$$

は、有限個の t を除いて $r_t = 0$ のとき、generalized permutation と呼ばれる。

$$\deg(\pi) = \sum_t t r_t$$

$$\mathrm{ord}(\pi) = \text{L.C.M of } \{t \mid r_t \neq 0\} \quad \text{最小公倍数}$$

$$\mathrm{wt}(\pi) = \frac{1}{2} \sum_t r_t$$

とおく。$\mathrm{wt}(\pi)$ は、integer あるいは half-integer である。

gen. perm. $\pi = \prod_t t^{r_t}$ に対して、有理式 $\prod_t (x^t - 1)^{r_t}$

を対応させ、これが多項式となるとき、π は Frame shape ~~である~~ と呼ばれる。この多項式は、明らかに有理整係数で最高次の係数は1、しかも根は全て1のべき根である。逆にこのような多項式は、$\prod_t (x^t-1)^{r_t}$ の形に（一意的に）書き表され、したがって Frame shape $\prod_t t^{r_t}$ が対応する。

1.2. $\eta(z)$ を Dedekind η-関数とする：

$$\eta(z)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \qquad q=e^{2\pi i z}$$

gen. perm. $\pi=\prod_t t^{r_t}$ に対して

$$\eta_\pi(z)=\prod_t \eta(tz)^{r_t}$$

とおく。π が

(1) $\deg(\pi)=0$ or 24

(2) $\mathrm{wt}(\pi)$ が正の整数

をみたすとする。(1) により、$\eta_\pi(z)$ は

$$\eta_\pi(z)=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots \qquad (a_n\in\mathbb{Z})$$

と、q のべき級数に展開されるが

(3) $a_1 \neq 0$

(4) $(m,n)=1 \Longrightarrow a_1a_{mn}=a_ma_n$

をみたすとき、$\eta_\pi(z)$ は multiplicative η-product と呼ばれる。簡単のため "π が multiplicative" などと

いう云い方もする。

1.3. 注目すべきことは、Leech lattice の自己同型群 $\cdot 0$ から、次のようにして mult. η-products の実例が得られることである。Leech lattice は、24次元ユークリッド空間の lattice だから、$\cdot 0$ は自然な $\mathbb{Q}$ 上の24次元表現 ρ_0 をもつ。$\cdot 0 \ni \sigma$ に対して、固有多項式 $\det(xI-\rho_0(\sigma))$ を考えると、この多項式に 1.1 で説明したようにして、Frame shape $\prod_t t^{r_t}$ が対応する。あまり厳密な書き方ではないが、便宜のため

$$\sigma = \prod_t t^{r_t}$$

のような書き方をする。さて、$\cdot 0$ は 164 個の共役類をもつが、異なる形の Frame shape は 160 個出てくる。そのうち 90 個は、$wt(\sigma)=0$ (i.e. $\sum r_t = 0$) であるが、他の 70 個は、$wt(\sigma)$ が正整数 (i.e. $\sum_t r_t$ が正の偶数) となる。$\cdot 0$ の Frame shape は、[4] の Table I で与えられているので参照されたい。ここで著しい事実は、次の定理が成立することである。

定理. (1) $wt(\sigma)=0$ とする。$\eta_\sigma(z) = \prod_t \eta(tz)^{r_t}$ は次の性質をもつ：或る $\Gamma_0(N)$ を含む genus 0 の Fuchs 群が存在して、$\eta_\sigma(z)$ は対応する関数体の生成元である。

(2) $wt(\sigma)>0$ ならば、$\eta_\sigma(z)$ は multiplicative であ

る。

(1)については，以下本講ではふれないが，明らかに有限群の"moonshines"と密接に関係している。(cf. [1], [4])。(2)の主張は，部分的には何人かの人によって知られていたが，全部をきちんと確めたのは，小池正夫氏である(cf [3])。

参考のため，(2)の内容をもう少し説明しよう。$wt(\sigma)>0$ なる·0の元σのFrame shape $\sigma=\prod_t t^{r_t}$ ~~[illegible]~~ は，

$$r_t \geq 0 \quad (\forall t) \Longrightarrow \text{Type C}$$

$$r_t < 0 \quad (\exists t) \longrightarrow \text{Type E}$$

と呼ばれる。Type CのFrame shapeは，25個存在するが，そのうち21個は，24次Mathieu群の元をcycle分割したものに対応する：

1^{24}, $1^8 2^8$, 2^{12}, $1^6 3^6$, 3^8, $1^4 2^2 4^4$, $2^4 4^4$, 4^6, $1^4 5^4$, $1^2 2^2 3^2 6^2$, 6^4, $1^3 7^3$, $1^2.2.4.8^2$, $2^2 10^2$, $1^2 11^2$, $2.4.6.12$, 12^2, $1.2.7.14$, $1.3.5.15$, 3.21, 1.23 (以上21個)

他の4個は，

$2^3.6^3$, $4^2 8^2$, 4.20, 2.22

である。これら25個の $\eta_\sigma(z)$ はprimitive cusp formとなり，とくにmultiplicativeである(cf Koike[2])。

Type EのFrame shapeは45(=70−25)個存在する

が, これらは全て具体的な Eisenstein series と同一視され, これから $\eta_\sigma(z)$ が multiplicative であることが分る (cf [3] の Table I)。例えば $\sigma = 2^{16}/1^{8}$ とすると,

$$\eta_\sigma(z) = E(z) - E(2z)$$

$$E(z) = \frac{1}{240} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \qquad a_n = \sum_{d|n} d^3$$

である。

1.4. ・0の元の Frame shape に対応するもの＞ほかに mult. η-products の実例は, 文献の中に多数見出される。

例1. $3^2 9^2$, 6.18, 8.16

$4^{16}/2^4 8^4$, $8^8/4^2 16^2$, $4^5 8^5/2^2 16^2$

最初の3つは, Jacobi 以来知られていたようであり, 上で引用した Koike [2] でも扱われている。5, 6番目のものもその中に見出される。最後のものは, 本年1月小池氏に指摘されたものである。今までの例は, 全て degree が24のものであるが, $\deg(\pi) = 0$ なる例を1つあげておこう:

例2. $\pi = 2^{10}/1^4 4^4$ とすると

$$\eta_\pi(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

ここで a_n は, $x^2+y^2=n$ の整数解の数で

$$a_n = \sum_{\substack{d|n \\ d:\text{odd}}} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

と書ける。これから $\eta_\pi(z)$ が mult. η-product であることが分る。なお、上の等式で最初の等式は、古典的な公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \theta_3(2z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2$$

を変形したもので、第二の等式は自明である。

このほかにも、mult. η-products の実例は多数存在するが、それらと ·0 の元の Frame shape に対応するものとの関係を観察するのが、本講の目的である。

§2. W-変換と T-変換.

2.1. 上記の目的のため、2種類の変換を考える。一般に、gen. perm $\pi = \prod_t t^{r_t}$ と正整数 Q において、

$$(5) \qquad \pi * Q = \prod_t \left(\frac{Qt}{(Q,t)^2}\right)^{r_t}$$

とおく。(Q, t) は Q と t の最大公約数を表す。π が (1), (2) をみたすとき、(i.e. $\deg(\pi)=0$ または 24 で $wt(\pi)=$ 正整数) 次の条件をみたす最小の自然数 N をとる：

(6) $\operatorname{ord}(\pi) \mid N$ i.e. $t \mid N$ if $r_t \neq 0$

(7) $\sum_t \frac{N}{t} r_t \equiv 0 \mod 24$

(8) $D_\pi \mid N$。 D_π は、体 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{wt(\pi)}\prod_t t^{r_t}}\right)$ の判別式を表す。ここで $\prod_t t^{r_t}$ は有理数と見て

いる。

N の約数 $Q>1$ で $(Q, \frac{N}{Q})=1$ をみたす Q に対して変換(5)を考える。このとき

$$\pi * Q = \pi * W_{Q,N}$$

と書く。このような変換を W-変換という。これは、保型関数論で Atkin-Lehner の変換と呼ばれるものであるが、それについては、[1], [4], [5] を参照。

注意. $wt(\sigma)>0$ なる $\mathcal{O}$ の元 σ に対して、$\sigma * W_{Q,N}$ は再び $\mathcal{O}$ の元の Frame shape であるが、$\deg(\sigma * W_{Q,N})=0$ である。また次の定理が成立すると思われる：

"定理" π を (1), (2) をみたす gen. perm とする。$\eta_\pi(z)$ が multiplicative ならば、$\eta_{\pi * W_{Q,N}}(z)$ も multiplicative.

この命題は、現在の所証明されていないが、本稿で現われる実例に対しては正しい。なお [5; Th 2.2] と本稿の §3.4 を参照。

さらにもう一つの変換を考える。gen. perm. $\pi = \prod_t t^{r_t}$ に対して、非負整数 e を次のように定める：

$$2^{e} \mid t \qquad (\forall t \text{ with } r_t \neq 0)$$
$$2^{e+1} \nmid t \qquad (\exists t \text{ with } r_t \neq 0)。$$

このとき、

$$\pi * T = \prod_{2^{e+1}|t} t^{r_t} \cdot \prod_{2^{e+1}\nmid t} \frac{(2t)^{3r_t}}{t^{r_t}(4t)^{r_t}}$$

とおく。このとき，

$$\eta_{\pi * T}(z) = c\,\eta_{\pi}\left(z + \frac{1}{2^{e+1}}\right) \quad (c\text{は定数})$$

が容易に示され，これを用いて次の定理が得られる。

定理 $\eta_\pi(z)$ が multiplicative ならば，$\eta_{\pi * T}(z)$ もそうである。

注意。上で定義した W-変換と T-変換は，ともに involutive な変換である：$\pi * W^2 = \pi * T^2 = \pi$。

2.2。ここで注意したいことは，mult. η-products の知られている実例の殆んど全ては，・0 の元の Frame shape に W-変換，T-変換をほどこして得られると云うことである。

例 3.（1）$\sigma = 1^2.2.4.8^2$（M_{24}の元）とする。

$$1^2.2.4.8^2 \xrightarrow{T} \frac{2^7 8^2}{1^2 4} \xrightarrow{W_{16,16}} \frac{2^2 8^7}{4.16^2} \xrightarrow{T} \frac{4^5 8^5}{2^2 16^2}$$

となり，§1.4 例1 であげた $4^5 8^5/2^2 16^2$ が ・0の元 $1^2 2.4.8^2$ から得られる。なお σ に W-，T-変換をほどこして得られ

るのは，これら4つだけであることに注意されたい。

(2) ・0の元として $\sigma = 8^4/4^2$ をとると，

$$8^4/4^2 \xrightarrow{W_{8,8}} 1^4/2^2 \xrightarrow{T} 2^{10}/1^4 4^4$$

となり，§1.4 例2であげた $2^{10}/1^4 4^4$ が・0の元 $8^4/4^2$ から得られる。なお

$$8^4/4^2 \xrightarrow{T} \frac{4^2 16^2}{8^2}$$

も mult. η-product を与え，$8^4/4^2$ に W-，T-変換をほどこして得られるのは，ここに現われた4つだけである。

注意．・0の元 σ (wt(σ) > 0) に W-，T-変換をほどこして得られる gen. perm は有限個である。このようにして，・0の元の Frame shape に対応する mult. η-products から，226個の mult. η-products の実例が得られ，知られた例の殆んど全ては，この中に見出される。これらの226個を <u>・0 に associate した mult. η-product</u> と呼ぶことにしよう。

§3. ・0の元に associate <u>しない</u> mult. η-products

3.1 ・0の元に associate しない mult. η-products の例としては，§1.4 例1であげた

$$3^2 9^2, \quad 6.18, \quad 8.16$$

がそのようなものである。これらは、$\cdot 0$ の元から、W-, T-変換をほどこしては得られないが、

$$(3^2 9^2)^3 = (6.18)^6 = 1^6 3^6, \quad (8.16)^8 = 1^8 2^8$$

（置換としてのべきをとっている）

で、$1^8 2^8$, $1^6 3^6$ は M_{24} の元の cycle 分解であるから、形の上では $\cdot 0$ の元に密接に関係している。

3.2. 上の3つのほかに、$\cdot 0$ に associate しない mult. η-products があるかどうかを調べるために次の問題を考える：

問題。Π_{24} を degree 24 の Frame shape 全体の集合（i.e. 次数24で有理整係数、根が全て1のべき根であるような多項式の全体）とする。$\Pi_{24} \ni \pi = \prod_t t^{r_t}$ に対して $\eta_\pi(z) = \prod_t \eta(tz)^{r_t}$ が mult. η-product となるのはどんな π か？

この問題に対する答は、次の定理である。

定理. $\eta_\pi(z)$ $(\pi \in \Pi_{24})$ が multiplicative とする。

I. $wt(\pi)$ が整数ならば、次の1つが成立つ：

(i) π は $\cdot 0$ の元の Frame shape か、それに associate したもの

(ii) $3^2 9^2$, 8.16, 6.18 のどれか

π は、

(iii) πは、次の6つのうちのどれか：

$$1^3 6^5/2^3 \cdot 3 \sim 2^5 12^3/4 \cdot 6^3$$

$$2^2 3^2 18^2/1 \cdot 6^2 \cdot 9$$

$$3^3 18^2/6^2 \cdot 9 \sim 2^2 12^3/4 \cdot 6^2$$

$$1 \cdot 3 \cdot 4^4 24^2/2^2 8^2 12^2$$

ここで、〜は W-、T-変換でお互いに移れることを示す。

II　wt(π)がhalf-integerならば、πは次の9つのうちのどれか：

$$6^5/3^2 \sim 3^2 12^2/6, \qquad 8^3$$

$$16^2/8 \sim 8 \cdot 32/16, \qquad 24$$

$$3 \cdot 18^2/6 \cdot 9 \sim 6^2 9 \cdot 36/3 \cdot 12 \cdot 18 \sim 8^2 48/16 \cdot 24$$

この定理の証明は、計算機を用いて行われた。もともとは、パソコン（NEC-PC9801 F2）を用いて、$ord(\pi) < 100$（$\pi \in \Pi_{24}$）なるπについて上の定理が成り立つことを確めたのであるが、一橋大学の山田裕理氏が大型計算機を用いて、全ての$\pi \in \Pi_{24}$に対して上の定理が成立することを証明した。なお、$|\Pi_{24}| = 195,966$で、そのうち$ord(\pi) < 100$なるものは60,914個である。またmultiplicative η-productsを与える$\pi \in \Pi_{24}$（i.e. 上の定理に現われるもの）は、全部で101個である。

3.3. 証明の概要を述べる。自然数 n に対して，π_n を 1 の原始 n 乗根を根とする円分多項式の Frame shape とする。良く知られているように

$$\deg(\pi_n) = \varphi(n)$$

$$\pi_n = \prod_{t|n} t^{\mu(\frac{n}{t})}$$

である。ここで φ，μ は Euler 関数，Möbius 関数である。さて，次の不定方程式を考える：

$$\sum_{n=1}^{90} \varphi(n) u_n = 24$$

ここで $\varphi(n) \leq 24$ ならば $n \leq 90$ であることに注意されたい。この方程式の非負整数解 $(u_1, u_2, \ldots, u_{90})$ に対して

(*) $\quad \pi = \pi(u_1, u_2, \ldots, u_{90}) = \pi_1^{u_1} \pi_2^{u_2} \cdots \pi_{90}^{u_{90}}$

とおくと，$\pi \in \Pi_{24}$ であり，逆に $\pi \in \Pi_{24}$ の Frame shape π は，全てこのようにして得られる。(*) によって得られた π に対して，$\eta_\pi(z)$ を作り，そのフーリエ~~級数~~展開

$$\eta_\pi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \qquad (a_1 = 1)$$

の係数 a_n を $1 \leq n \leq 21$ に対して計算し，

(**) $\quad a_{mn} = a_m a_n \qquad (m, n) = 1,\ 1 \leq m, n \leq 21$

が成り立つような π を探す。もちろん，このような $\eta_\pi(z)$ は mult. η-product の候補者にしか過ぎないが，これらが実際

に, mult. η-products を与えるかどうかは, 次のようにして確める。なお, 幸いなことにこのような候補者の数は, 115,966 個の Π_{24} の元のうち, 189個にしか過ぎない。さて, これらの189個の元に対して, 次の条件をみたすかどうかを確めるのが有益である:

(#) $\mathrm{ord}(\pi) \mid N$ なるある自然数 N が存在して, $Q>1$ $(Q, \frac{N}{Q})=1$ なる N の任意の約数 Q に対して,

$$\deg(\pi * Q) = 0 \text{ または } 24.$$

この条件(#)は, 一般の gen. perm ($\deg(\pi)=0$ 又は 24 で $\mathrm{wt}(\pi)=$ 正整数) に対して, $\eta_\pi(z)$ が multiplicative であるための必要条件であると思われる。すなわち次の定理が成り立つと思われる:

"定理" $\eta_\pi(z)$ が multiplicative ならば, π は (#) をみたす。(cf. [5] Th 2.2)

これは証明されているわけではないが, (**) をみたす $\pi \in \Pi_{24}$ が, (#) をみたさないときは, $n>21$ なる a_n を計算して見ると, 必ずどこかで (これもパソコンの助けを借りるが) 係数の乗法性 $a_{mn}=a_m a_n$ が成立しなくなることが確められる。$\pi \in \Pi_{24}$ が (#) をみたせば, それは既知のものか定理の(iii) であげたものであり, 後者は具体的な Eisenstein series と同一視出来て、それから multiplicative であることが分る。詳しくは、[5]の§3を参照されたい。

3.4. 最後に §2.1 (p.7) と上で述べた2つの"定理"(予想)について注意しておく。これらの予想は、次の問と密接に関連している：

問題. π を (1), (2) をみたす gen. perm. で $\eta_\pi(z)$ が multiplicative とする。このとき $\eta_\pi(z)$ は cusps (i.e. 有理点 $z \in \mathbb{Q}$) で holomorphic か？

この問題が真ならば、上の2つの予想が正しいことは、小池正夫氏により確められている。なお、(1), (2)をみたす (multiplicative とは限らない) gen. perm. π に対して N を (6), (7), (8) で定めると

$$\eta_\pi\left(\frac{az+b}{cNz+d}\right) = \chi(d)\,(cz+d)^{wt(\pi)}\,\eta_\pi(z)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

χ は体 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{wt(\pi)}\prod_t t^{r_t}}\right)$ の Dirichlet 指標 (cf. [5] Th 2.1)

が成り立つが、一般にはこの $\eta_\pi(z)$ が $\Gamma_0(N)$ の cusp で (meromorphic ではあるが) holomorphic とは限らない。上の問題は、「$\eta_\pi(z)$ が multiplicative ならば、

$\Gamma_0(N)$の各cuspでholomorphicか」従って「$\eta_\pi(z)$は(level N, weight wt(π), character χの) modular formか？」と云う問である。

文献

[1] J.H. Conway and S.P. Norton, Monstrous moonshine, Bull London Math. Soc., 11 (1979), 308−339

[2] M. Koike, On Mackay's conjecture, Nagoya Math. J., 95 (1984), 85−90.

[3] M. Koike, Moonshines of $PSL_2(\mathbb{F}_8)$ and the automorphism group of Leech lattice, to appear in Japanese Journal.

[4] T. Kondo, The automorphism group of Leech lattice and elliptic modular functions, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985), 337−362

[5] T. Kondo, Examples of multiplicative η-products, 東大教養紀要 近刊.